NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. H. ANDOYER

PROFESSEUR D'ASTRONOMIE PHYSIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PARIS
C. NAUD, ÉDITEUR
3, RUE RACINE, 3

1904

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. H. ANDOYER

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. H. ANDOYER

PROFESSEUR D'ASTRONOMIE PHYSIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS



PARIS
C. NAUD, ÉDITEUR
3, RUE RACINE, 3
—
1904

ÉTAT DES SERVICES

1881-84. Élève de l'Ecole Normale supérieure.

1884. Agrégé des sciences mathématiques.

1884-92. Chargé de conférences, puis Maître de conférences à la Faculté des sciences de Toulouse; en même temps, aide-astronome, puis astronome-adjoint à l'Observatoire de Toulouse.

1886. Docteur ès sciences mathématiques.

1892. Maître de conférences à la Faculté des sciences de l'Université de Paris, chargé spécialement de la préparation des candidats à l'Agrégation des sciences mathématiques; en même temps, chargé d'un cours complémentaire d'Astronomie mathématique et Mécanique céleste, à la même Faculté.

1902. Professeur-adjoint à la Faculté des sciences de l'Université de Paris, conservant les mêmes fonctions que ci-dessus.

1903. Professeur d'Astronomie physique à la Faculté des sciences de l'Université de Paris.

1893. Membre du jury d'Agrégation, pour l'enseignement spécial (ordre des sciences).

1894. Professeur au lycée Fénelon.

1894-95-96-97-98-1900. Membre du jury d'Agrégation pour les jeunes filles (ordre des sciences).

1902-03. Membre du jury d'Agrégation pour les sciences mathématiques.

1902. Présenté en seconde ligne à l'Académie des Sciences en remplacement de M. Faye, dans la Section d'Astronomie.

1903. Lauréat de l'Académie des Sciences pour le prix Pontécoulant.

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE M. H. ANDOYER

Les fonctions diverses dont j'ai été chargé jusqu'à présent m'ont conduit naturellement à m'occuper de questions différentes, principalement d'Astronomie pratique ou mathématique, et subsidiairement d'Analyse, de Mécanique rationnelle, et aussi d'enseignement.

I. — ASTRONOMIE PRATIQUE

Pendant les premières années de mon séjour à l'Observatoire de Toulouse, j'ai participé à tous les travaux réguliers d'astronomie pratique dont l'accomplissement constitue la vie même d'un observatoire.

En particulier, j'ai fait de nombreuses observations des phénomènes que présentent les satellites de Jupiter et de Saturne; des observations méridiennes de la Lune; des observations équatoriales de petites planètes et de comètes; enfin des observations d'étoiles doubles. Toutes ces observations n'ont pas encore été publiées : le détail de celles qui l'ont été se trouve dans les tomes II

et III des *Annales de l'Observatoire de Toulouse*, et dans une note insérée aux *Comptes rendus de l'Aeadémie des Sciences* (t. CXII, 1891, p. 510-511).

Dès la découverte de la planète 246, *Asporina*, par M. Borrelly, à Marseille, le 6 mars 1885, je me suis proposé de calculer les éléments de l'orbite de cet astéroïde. Un premier calcul fait avec trois observations m'a fourni des éléments provisoires qui m'ont permis de calculer une éphéméride pour la durée de l'opposition. Une fois l'opposition terminée, j'ai calculé, en faisant usage de toutes les observations obtenues dans les différents observatoires, de nouveaux éléments plus approchés, et j'ai préparé une éphéméride pour l'opposition de 1886. Les observations nouvelles obtenues pendant cette seconde opposition m'ont permis de corriger les premiers éléments calculés, en suivant la méthode de Th. v. Oppolzer, et de représenter avec une grande exactitude l'ensemble des observations faites jusqu'alors. Les résultats des calculs que je viens d'indiquer sont consignés dans les notes suivantes :

Éléments provisoires de la planète 246 *Borrelly* (*Comptes rendus de l'Aeadémie des Seienees*, t. C, 1885, p. 895, et *Bulletin astronomique*, t. II, 1885, p. 176) ;

Éléments et éphéméride de la planète 246 (*Comptes rendus de l'Aeadémie des Scienees*, t. C, 1885, p. 1112) ;

Éléments et éphéméride de la planète 246 *Asporina* (*Bulletin astronomique*, t. III, 1886, p. 164-166 et p. 345-346).

Ces éléments et ces éphémérides ont été publiés aussi dans le *Berliner astronomisches Iahrbueh*, pour les années correspondantes.

En 1889, après la réunion du premier Congrès international astrophotographique, et à la suite des décisions qui y furent prises relativement à la construction de la carte du Ciel, j'ai été chargé par M. Baillaud, l'éminent directeur de l'Observatoire de Toulouse, du service de photographie céleste. Jusqu'en 1892, époque où j'ai quitté Toulouse, je me suis consacré à l'installation de ce service ; j'ai préparé les étoiles de repère, dont M. Saint-Blancat a fait un

beau catalogue, qui constitue le tome IV des *Annales de l'Observatoire de Toulouse*; j'ai commencé la collection des clichés nécessaires pour la carte du Ciel; enfin, j'ai fait des essais divers de photographie céleste. En particulier, j'ai pu obtenir, avec l'aide de M. Montangerand, des poses très longues, prolongées pendant plusieurs nuits sucessives, de la nébuleuse de la Lyre et de celle d'Orion, des Pléiades, etc.

Pendant l'éclipse totale de lune du 15 novembre 1891, j'ai fait, en collaboration avec M. Ch. Fabre, des expériences *Sur l'emploi des plaques orthochromatiques en photographie astronomique* dont le résultat est rapporté dans une note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (tome CXIV, 1892, p. 60-61). Je dirai seulement ici que les plaques ordinaires au gélatinobromure ou collodiobromure d'argent ont montré une insensibilité à peu près complète pour les portions du disque lunaire plongées dans l'ombre, tandis que les plaques rendues orthochromatiques par l'éosine ou la cyanine ont donné de meilleurs résultats pour ces mêmes parties.

II. — ASTRONOMIE MATHÉMATIQUE

§ I. — ÉTUDES SUR LA THÉORIE DES ORBITES INTERMÉDIAIRES

Mes premières recherches de Mécanique céleste ont porté sur les méthodes dues au regretté directeur de l'observatoire de Stockholm, M. Hugo Gyldèn. Elles m'ont conduit tout d'abord à ma thèse de doctorat, intitulée : **Contribution à la théorie des orbites intermédiaires**, et insérée au tome I des *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, 1887, ainsi qu'au tome III *des Annales de l'Observatoire de Toulouse*. Comme on le sait, M. Gyldèn appelle *orbite intermédiaire* d'un astre, une courbe représentant le mouvement réel de cet astre d'une façon plus approchée que l'ellipse de Képler ; et cette courbe est choisie, suivant les cas, de façon à constituer une base solide pour les approximations successives qui doivent mener à la connaissance complète des coordonnées de l'astre.

Faire voir comment M. Gyldèn a été conduit à rejeter l'ellipse de Képler comme première approximation ; par quelles considérations peut être motivé, dans chaque cas particulier, le choix d'une orbite intermédiaire ; comment on peut avoir égard aux termes les plus considérables de la fonction perturbatrice, et cela, en évitant le développement par rapport aux puissances de la masse perturbatrice et l'introduction des termes séculaires ; tel est, en quelques mots, le but du travail que j'ai présenté comme thèse.

Afin de simplifier le plus possible l'exposition, j'ai pris comme point de départ les équations que Laplace établit au chapitre II du

second livre de la *Mécanique céleste*, et non les équations plus compliquées de M. Gyldèn, qui ont la plus grande analogie avec celles de Hansen.

Après avoir exposé les méthodes qui servent à former les équations de l'orbite intermédiaire dans le cas le plus général, je réduis ces équations à une forme canonique, qui, ramenée elle-même par M. Gyldèn à l'équation de Lamé, est susceptible d'intégration à l'aide des fonctions elliptiques, comme l'ont montré les belles et importantes recherches de M. Hermite. Je me suis attaché surtout à bien préciser la marche des calculs numériques et la détermination des constantes arbitraires successivement introduites de façon à éviter l'apparition de tout terme séculaire.

J'ai traité le cas particulier intéressant dans lequel la fonction perturbatrice est supposée fonction du seul rayon vecteur, et comme application, j'ai retrouvé, par une voie bien différente, les formules données antérieurement par M. Tisserand, pour déterminer le mouvement des apsides des satellites inférieurs de Saturne sous l'influence de l'aplatissement de la planète et sous l'action de l'anneau.

Enfin, je détermine avec une approximation très rapide l'orbite intermédiaire de la Lune, et j'obtiens avec une grande précision les inégalités séculaires du mouvement du nœud et du périgée de l'orbite lunaire; quant aux grandes inégalités périodiques de la longitude, elles se retrouvent avec une erreur relative qui ne dépasse pas un dixième. Une seconde approximation fournirait certainement des tables de la Lune aussi précises que celles de la *Mécanique céleste* de Laplace.

Dans une note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (**Sur une équation différentielle que l'on rencontre dans la théorie des orbites intermédiaires,** t. CIV, 1887, p. 1425-1427) et dans un court article publié au *Bulletin astronomique*, t. IV, 1887, p. 177-183, (**Remarques sur les équations différentielles que l'on rencontre dans la théorie des orbites intermédiaires**), j'expose une

méthode tout à fait différente de celle de M. Gyldèn, pour intégrer les équations du type le plus simple rencontrées dans le précédent travail ; cette méthode repose sur les propriétés des équations linéaires à coefficients périodiques et holomorphes dans tout le plan, en même temps que sur l'emploi des coefficients indéterminés.

Peu de temps avant sa mort, M. Gyldèn avait entrepris la publication d'un grand ouvrage, *Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales :* c'était l'exposition définitive de ses longues recherches sur le mouvement des planètes. Le premier volume seul a paru, et j'en ai donné une analyse détaillée au *Bulletin astronomique* (t. XII, 1895, p. 79-91).

Je rattacherai encore aux mémoires précédents une note relative aux **Cas de commensurabilité approchée dans le mouvement des petites planètes**, qui doit paraître dans l'un des plus prochains numéros du *Bulletin astronomique*. Cette note, rédigée en 1896, quelques jours avant la mort du si regretté M. Tisserand, avait pour objet de mettre en évidence un cas singulier qui se présente dans l'étude des cas de commensurabilité approchée du moyen mouvement d'un astéroïde avec celui d'une grosse planète, et qui avait été omis par M. Tisserand dans ses recherches sur ce sujet. M. Tisserand lui-même m'avait demandé de rédiger cette note pour le *Bulletin astronomique*, mais j'en ai voulu retarder la publication. Je dois ajouter que le même cas singulier, qui tient à l'hypothèse d'une très faible excentricité pour la petite planète considérée, vient précisément d'être signalé par M. Poincaré, dans un article paru tout récemment au *Bulletin astronomique* (août 1902).

§ 2. — Études sur les formules générales de la mécanique céleste et sur le théorème de Poisson

1° Sur les formules générales de la Mécanique céleste (*Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, t. IV, 1890 ; *Annales de l'Observatoire de Toulouse*, t. III).

Dans ce mémoire, j'ai eu pour but d'exposer une méthode générale d'intégration des différents problèmes de la Mécanique céleste : mouvement de translation des planètes et de leurs satellites, mouvement de rotation des corps célestes sur eux-mêmes.

Admettant simplement l'existence des moyens mouvements, et supposant les coordonnées qui définissent la position d'un corps céleste développables en séries trigonométriques ordonnées suivant les cosinus ou sinus des sommes de multiples de certains arguments connus ou inconnus, mais en nombre fini, je montre comment l'application de la méthode des coefficients indéterminés permet, sans introduire aucune complication, de déterminer par approximations successives, toutes les quantités inconnues : il suffit de développer en séries trigonométriques les deux membres de chacune des équations qui définissent le mouvement, et d'égaler de part et d'autre les coefficients du cosinus ou sinus d'un même argument, pour obtenir toutes les relations nécessaires à la détermination des inconnues. C'est donc, comme on le voit, une simple extension de la méthode suivie par Laplace dans sa théorie de la Lune.

Dans les cas ordinaires, par exemple quand il s'agit des grosses planètes, il n'y aura aucune difficulté dans le calcul des approximations successives ; dans les cas particuliers, il faudra apporter à ce calcul une plus grande attention ; mais toutes les fois que les hypothèses faites sont légitimes, on peut ainsi trouver des formules purement trigonométriques, vérifiant les équations du mouvement avec telle approximation qu'on voudra. Toutefois, la convergence des séries obtenues, analogues à celles de M. Lindstedt, n'est pas discutée ; on sait maintenant, d'après les beaux travaux de M. Poincaré, que cette convergence n'existe pas, mais que ce n'est pas là une raison suffisante pour abandonner l'usage de telles solutions.

Après avoir montré comment on peut ainsi calculer les coordonnées du centre de gravité d'un corps céleste, j'applique la même méthode au calcul des éléments de l'ellipse képlérienne osculatrice à chaque instant à l'orbite du corps considéré, et je démontre com-

plètement, afin de légitimer tout ce qui a été dit, les théorèmes de Lagrange et Poisson relatifs à l'invariabilité des grands axes, sous la forme qui leur convient quand on évite l'introduction des termes séculaires, pour les remplacer par des termes périodiques portant sur des arguments dans lesquels le coefficient du temps est de l'ordre des forces perturbatrices.

Enfin, j'étends la méthode employée au problème du mouvement de rotation des corps célestes sur eux-mêmes, et je rends compte de la façon la plus simple des phénomènes de libration que présentent les satellites de Jupiter dans leur mouvement de translation autour de la planète, et la Lune dans son mouvement de translation autour de la Terre et dans son mouvement de rotation autour de son centre de gravité.

2° Sur l'extension que l'on peut donner au théorème de Poisson relatif à l'invariabilité des grands axes.

Ce mémoire, inséré au tome XXIII des *Annales de l'Observatoire de Paris* (Mémoires), a été précédé d'une note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. CXXIII, 1896, p. 790-793) qui en contient les résultats principaux.

Je me suis proposé, ici, de rechercher d'une façon précise sous quelle forme il est possible de généraliser les théorèmes de Lagrange et de Poisson, relatifs à l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires.

La question avait déjà été étudiée autrefois par E. Mathieu, mais d'une façon incomplète et même erronée; puis par M. Spiru Haretu, dans une thèse présentée à la Faculté des sciences de Paris. Ce dernier auteur montre bien que le théorème de Poisson ne s'applique pas au-delà du second ordre, mais n'énonce pas les nouvelles propositions qui peuvent le remplacer à partir du troisième ordre.

Mes recherches, qui comprennent l'examen des termes de la fonction perturbatrice jusqu'au quatrième ordre inclusivement, s'appliquent, d'ailleurs, à un problème très général dont les différents pro-

blèmes de la Mécanique céleste ne sont que des cas particuliers.

Soit un système matériel dont la position dépend de $2r$ variables canoniques conjuguées deux à deux $p_1, p_2, \dots p_r$; $q_1, q_2, \dots q_r$, vérifiant les équations différentielles

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial p_i},$$

R étant une fonction des *éléments* (p) et (q) et du temps t.

Supposons la fonction R développable en série trigonométrique de la forme

$$R = \Sigma (A_p \cos V_p + B_p \sin V_p);$$

les coefficients A_p et B_p dépendent seulement des éléments, et non de t; les arguments V_p sont de la forme

$$V_p = p_1 (n_1 t + c_1) + p_2 (n_2 t + c_2) + \dots + p_\rho (n_\rho t + c_\rho) + U_p,$$

les p_i étant des entiers positifs, négatifs ou nuls; les n_i et les c_i sont des constantes dépendant des éléments ; les arguments U_p sont des fonctions linéaires connues du temps t; enfin, on a $\rho \leq r$.

D'ailleurs, je suppose que toutes les séries trigonométriques employées sont écrites sous forme symétrique, c'est-à-dire que les arguments V_p peuvent prendre des valeurs égales et de signes contraires, et que, pour deux telles valeurs, les coefficients tels que A_p sont égaux, tandis que les coefficients tels que B_p sont égaux et de signes contraires.

Remplaçons les (p) et les (q) par $2r$ autres éléments $a_1, a_2, \dots a_{2r}$; ceux-ci seront déterminés par les équations

$$\frac{da_i}{dt} = \sum (a_i, a_j) \frac{\partial R}{\partial a_j},$$

où, suivant la notation de Poisson, on a

$$(a_i, a_j) = \sum \left(\frac{\partial a_i}{\partial p_k} \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_i}{\partial q_k} \frac{\partial a_j}{\partial p_k} \right).$$

Prenons pour les $2r$ éléments (a) les quantités n_i et c_i, et $2r - 2\rho$ autres quantités $b_1, b_2, \ldots b_{2r-2\rho}$; supposons que les coefficients A_p et B_p, de même que les parenthèses (a_i, a_j), sont indépendants des c_i ; posons

$$l_i = \int n_i dt,$$
$$n_i t + c_i = l_i + e_i,$$

et exprimons R à l'aide des n_i, e_i, l_i, b_k, de façon que t n'y figure explicitement que par les U_p. Imaginons encore que l'on sache *a priori*, d'une façon quelconque, qu'il est possible de trouver pour les quantités n_i, e_i, b_k, et pour les produits tels que $(a_i, a_j)\frac{\partial R}{\partial a_j}$ des expressions purement trigonométriques analogues à celle de R, les V_p étant des arguments connus proportionnels au temps : ces hypothèses permettent de simplifier les équations qui définissent les a_i et d'énoncer le théoréme suivant.

Considérons les coefficients A_p, B_p, du développement de R comme des quantités petites de premier ordre, et calculons les valeurs des a_i par approximations successives, en les ordonnant par rapport au paramètre fondamental. Dans la première approximation, quand on néglige R, les a_i ont des valeurs constantes α_i ; en particulier les n_i, e_i, l_i, ont les valeurs ν_i, ε_i, $\lambda_i = \nu_i t + \varepsilon_i$.

Une fonction f des éléments se développe alors, par rapport au paramètre principal, sous la forme

$$f_0 + \delta f + \delta^2 f + \delta^3 f + \ldots,$$

et en prenant f sous la forme $\Sigma\varphi_i\frac{\partial R}{\partial a_i}$, les φ_i étant des fonctions d'ordre zéro, dépendant uniquement des n_i et des b_k, on a pour $\delta^n f$ une expression telle que

$$\delta^n f = X_0^{(n)} + tX_1^{(n)} + t^2 X_2^{(n)} + \ldots + t^n X_n^{(n)},$$

les $X_i^{(n)}$ étant des fonctions périodiques développables sous la forme

$$\Sigma\,(Y_p^{(n)} \cos \omega_p + Z_p^{(n)} \sin \omega_p).$$

On suppose ici que la partie du premier ordre de R s'écrit

$$R_0 = \Sigma \left(P_p \cos \psi_p + Q_p \sin \psi_p\right),$$

où

$$\psi_p = p_1 (\lambda_1 + \varepsilon_1) + p_2 (\lambda_2 + \varepsilon_2) + \ldots + U_p,$$

et les coefficients $Y_p^{(n)}$ et $Z_p^{(n)}$ contiennent précisément $n + 1$ facteurs qui sont des P_p ou Q_p, ou des dérivées de ces quantités par rapport aux α_i ; de plus, si $\psi_p^{(1)}, \psi_p^{(2)}, \ldots, \psi_p^{(n+1)}$, sont les arguments qui correspondent à ces facteurs, on a

$$\omega_p = \psi_p^{(1)} + \psi_p^{(2)} + \ldots + \psi_p^{(n+1)}.$$

Si l'on considère $X_i^{(n)}$, les ω_p correspondants sont des sommes d'arguments $\psi_p^{(q)}$ vérifiant au moins i relations indépendantes de la forme

$$(a) \qquad \psi_p^{(q')} + \psi_p^{(q'')} + \ldots = C^{ste},$$

le nombre des termes du premier membre étant inférieur à $n + 1$; et, en particulier, pour avoir la partie constante de $X_i^{(n)}$, il faut avoir la nouvelle relation.

$$(b) \qquad \psi_p^{(1)} + \psi_p^{(2)} + \ldots + \psi_p^{(n+1)} = C^{ste}.$$

Mais, et c'est en cela que constitue l'extension naturelle du théorème de Poisson et ce théorème lui même, si la fonction f est la dérivée par rapport au temps d'une fonction quelconque des seuls moyens mouvements n_i, et en particulier de la fonction $\int (dR)$ de Laplace, il ne suffit pas, pour former la partie constante de $X_i^{(n)}$, de supposer i relations indépendantes de la forme (a) et la relation (b) entre les arguments $\psi_p^{(q)}$, car les termes obtenus ainsi s'entredétruisent tous ; mais il faut supposer entre ces arguments une nouvelle relation (a) indépendante des précédentes, et l'on obtient alors des termes qui ne disparaissent pas ; en particulicr les quantités $X_{n-1}^{(n)}$ et $X_n^{(n)}$, par suite, n'ont pas de partic constante.

J'ai vérifié ce théorème en examinant seulement les valeurs de δf, $\delta^2 f$ et $\delta^3 f$, ce qui conduit déjà à de très longs développements : mais la marche de la démonstration permet de supposer que la proposition subsiste, telle que je viens de l'énoncer, pour toute valeur de n.

3° Sur le calcul des équations de perturbations (*Bulletin astronomique*, t. XIX, 1902, p. 49-61).

Soit un système matériel en mouvement sous l'action d'une fonction de forces U; $q_1, q_2, \ldots, q_r$ sont les paramètres qui déterminent la position du système à un instant donné ; les liaisons sont indépendantes du temps ; U est une fonction des seules variables q_i et t. On exprime la demi-force vive T à l'aide des q_i et de leurs dérivés q'_i, et l'on fait $p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$. L'intégration des équations du mouvement dépend de $2r$ constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

Si l'on augmente la fonction U d'une fonction *perturbatrice* R, qui dépend de t et des q_i, les formules obtenues précédemment pour le calcul des q_i et p_i conviennent encore au nouveau mouvement, à la condition de regarder les α_i comme des quantités variables déterminées par les équations différentielles

$$\Sigma[\alpha_i \alpha_j] \frac{d\alpha_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \alpha_i},$$

et en faisant

$$X(\alpha_i) = \Sigma\, p_k \frac{\partial q_k}{\partial \alpha_i},$$

on a

$$[\alpha_i \alpha_j] = \frac{\partial X(\alpha_i)}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial X(\alpha_j)}{\partial \alpha_i}.$$

Supposons que, comme il arrive dans les problèmes de la Mécanique céleste, la fonction U ne dépende explicitement du temps que par l'intermédiaire de certains arguments connus $V_1, V_2, \ldots$ linéaires par rapport au temps, et soit développable en série trigonométrique procédant suivant les cosinus et sinus des sommes des multiples de

ces arguments. Supposons de plus que l'intégration fasse apparaître un certain nombre s de nouveaux arguments N_1, N_2,... analogues à V_1, V_2,... de la forme $n_i t + \lambda_i$; enfin que les valeurs des p_i et q_i soient développables sous forme périodique à l'aide des arguments V_i et N_i.

Imaginons encore que l'on puisse choisir pour les constantes α_i les $2s$ quantités n_i et λ_i, et $2r - 2s$ autres quantités β_1, β_2, ... ; et supposons que, ce système de constantes adopté, les coefficients des séries trigonométriques considérées ci-dessus dépendent des n_i et des β_k, mais non des λ_i.

Si alors on désigne par $K(\alpha_i)$ et par K les parties constantes des développements périodiques des $X(\alpha_i)$ et de $T + U$, je démontre les propositions suivantes :

K dépend des seuls n_i et $K(\lambda_i)$ est la dérivée partielle de K par rapport à n_i ; par suite les crochets $[\lambda_i\, \lambda_j]$ et $[\lambda_i\, \beta_k]$ sont nuls, et l'on a

$$[\lambda_i\, n_j] = [\lambda_j\, n_i] = \frac{\partial^2 K}{\partial n_i\, \partial n_j}.$$

Les crochets où figure l'une des quantités λ_i sont ainsi tous calculés fort simplement, et ceux qui ne sont pas nuls ne dépendent que de K, qui est une fonction des seuls n_i.

Pour calculer les autres on a la relation générale

$$[\alpha_i\, \alpha_j] = \frac{\partial\, K(\alpha_i)}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial\, K(\alpha_j)}{\partial \alpha_i}.$$

Grâce à ces propositions, obtenues antérieurement par M. S. Newcomb d'une façon toute différente, on peut faire disparaître le temps en dehors des signes périodiques, dans les équations de perturbations ; c'est ce qu'avait démontré autrefois J.-A. Serret, d'une façon peu simple, dans le cas particulier du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.

Il faut encore remarquer que ce sont ces mêmes propriétés des

crochets $[\alpha_i\, \alpha_j]$ qui permettent de demontrer le théorème de Poisson dans toute sa généralité.

J'ajoute aux théorèmes précédents quelques propositions complémentaires dont on peut faire découler immédiatement les théorèmes d'Adams et ceux de MM. Newcomb et Brown sur l'accélération séculaire de la longitude moyenne de la Lune.

Enfin j'applique les résultats obtenus aux deux problèmes classiques de la Mécanique céleste élémentaire, en formant d'une façon très rapide les crochets dont on a besoin pour appliquer la méthode de la variation des constantes, quand on étudie le mouvement de translation d'une planète ou bien le mouvement de rotation de la Terre autour de son centre de gravité.

§ 3. — Etudes sur la théorie de la lune

Sous ce titre, je réunirai les travaux suivants :

1° **Sur quelques inégalités de la longitude de la Lune** (*Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, t. VI, 1892 ; *Annales de l'Observatoire de Toulouse*, t. III).

2° **Sur quelques inégalités de la longitude de la Lune**, *Deuxième mémoire*. (*Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, t. VII, 1893 ; *Annales de l'Observatoire de Toulouse*, t. III).

3° **Sur la théorie de la Lune** (*Bulletin astronomique*, t. XVIII, 1901, p. 177-208).

4° **Sur la théorie de la Lune**, *Deuxième article*. (Ce mémoire est à l'impression, et doit paraître dans un des prochains numéros du *Bulletin astronomique*).

5° **Théorie de la Lune** un volume de la collection *Scientia* (C. Naud, 1902).

6° **Sur la théorie de la Lune** (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXX, 1900, p. 1532-1533).

7° **Sur la longitude de la Lune** (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXXI, 1900, p. 1288-1289).

8° **Sur l'accélération séculaire de la longitude moyenne de la Lune** (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXXV, 1902, p. 432.)

Ces trois dernières notes contiennent les résultats les plus importants des mémoires précédents.

Amené par des considérations théoriques à étudier les séries qui représentent les coefficients des inégalités des coordonnées de la Lune, je n'ai pas tardé à reconnaître, en calculant le coefficient de la *variation*, que la série que j'obtenais pour le représenter cessait de concorder avec celle que donne Delaunay, à partir du huitième ordre inclusivement.

Comme d'ailleurs le résultat de mon calcul coïncidait avec celui qu'on peut tirer sans peine des formules données par M. G.-W. Hill dans son beau mémoire intitulé : *Researches in the lunar theory* et publié au tome I de l'*American Journal of mathematics*, il fallait en conclure que les calculs de Delaunay, dont l'exposition forme les tomes XXVIII et XXIX des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, sont entachés de légères erreurs, au moins lorsqu'il s'agit des termes d'ordre élevé. Je me suis proposé de corriger ces erreurs, qui déparent la beauté de l'œuvre de Delaunay : mais c'est là un travail considérable, et je n'ai calculé à nouveau jusqu'à présent que les termes qui dépendent uniquement du rapport m des moyens mouvements du Soleil et de la Lune, des deux premières puissances de l'excentricité e de l'orbite lunaire, et de la première puissance e' de l'excen-

tricité de l'orbite du Soleil. D'ailleurs tous ces calculs ont été faits en suivant deux méthodes essentiellement distinctes, ce qui, à la vérité, double le travail, mais ce qui permet de regarder les résultats obtenus comme certains. Un tel contrôle est d'ailleurs indispensable : il suffit pour s'en convaincre de songer à la multitude des opérations à effectuer, et à la facilité avec laquelle on peut commettre une erreur, quand on opère constamment sur des nombres entiers qui peuvent avoir jusqu'à quinze chiffres ; il ne faut pas oublier non plus que les résultats à trouver ne sont pas des nombres dont il suffit d'avoir une valeur approchée, mais des fractions ordinaires dont il faut calculer exactement les deux termes.

Les quatre premiers mémoires énumérés ci-dessus sont consacrés à l'exposition des méthodes suivies pour exécuter les calculs dont je viens de parler, et contiennent aussi les résultats obtenus ; ceux-ci confirment absolument la conclusion qui s'imposait après l'étude de la seule variation. Tous les termes complémentaires donnés par Delaunay au delà du septième ordre, et dont le calcul se trouve expliqué au chapitre x de sa théorie du mouvement de la Lune, intitulé : *Recherches supplémentaires sur la longitude de la Lune*, tous ces termes, dis-je, sont inexacts ; de plus quelques-uns mêmes des termes d'ordre inférieur au huitième sont aussi inexacts, mais ce n'est là qu'une exception.

On pourrait se proposer de rechercher dans les formules mêmes de Delaunay la cause de ses erreurs ; mais ce serait-là, je crois, prendre une peine inutile, car au point de vue du calcul, la méthode suivie par Delaunay et qui porte son nom, paraît devoir être abandonnée à cause des complications qu'elle entraîne. Il m'est arrivé une fois seulement d'apercevoir immédiatement une erreur dans les formules de Delaunay, et j'en ai donné le détail à la fin du deuxième mémoire sur quelques inégalités de la longitude de la Lune.

Les erreurs que j'ai relevées jusqu'à présent sont petites, et chacune, prise individuellement, altère la longitude de la Lune de moins d'un dixième de seconde d'arc ; mais, je le répète, au point de vue

purement analytique, le seul qui m'ait occupé, la grandeur d'une erreur commise sur un nombre commensurable est indifférente ; la seule chose qui importe, c'est la valeur exacte de ce nombre ; c'est là, d'ailleurs, la pensée même de Delaunay, telle qu'il l'exprime avec force dans l'introduction qu'il a mise en tête de son œuvre. J'ai d'ailleurs eu la satisfaction de voir la valeur nouvelle que j'ai donnée pour la partie du moyen mouvement du périgée lunaire qui ne dépend que de m, pleinement confirmée par un calcul postérieur de M. G.-W. Hill, exécuté d'une façon tout à fait indépendante (*Annals of mathematics*, IX) ; j'ai vu aussi, grâce aux nouvelles valeurs que j'ai calculées pour les termes en e^2, en particulier, disparaître les divergences sensibles que M. E.-W. Brown avait signalées entre les résultats de Delaunay et les siens propres : ceux-ci, comme on le sait, sont obtenus en abandonnant la méthode des développements en série suivant les puissances de m, et en employant dès le début du calcul la valeur numérique de cette quantité.

Je vais maintenant analyser sommairement les quatre premiers mémoires indiqués au début de ce paragraphe.

Dans le premier de ces travaux, je n'ai eu en vue que les termes qui dépendent uniquement de m et de la première puissance de e ; la partie du moyen mouvement du périgée lunaire qui ne dépend que de m accompagne ces termes. Comme, primitivement, je m'occupais seulement de la longitude de la Lune, qui est en effet la coordonnée dont la connaissance réclame le plus de précision, et comme la latitude n'intervient pas dans les termes précités, j'ai d'abord formé, par élimination du rayon vecteur une équation différentielle du quatrième ordre propre à déterminer la longitude, et ne renfermant pas d'autre fonction inconnue ; cette élimination est facile dans le problème actuel, puisqu'on néglige le rapport des dimensions des orbites de la Lune et du Soleil.

L'équation différentielle obtenue est ensuite intégrée par la méthode des coefficients indéterminés, conformément aux principes

généraux exposés dans mon mémoire *Sur les formules générales de la Mécanique céleste*. Les quantités inconnues sont déterminées par un ensemble d'équations faciles à résoudre par approximations successives.

Afin de contrôler les développements en série suivant les puissances de m ainsi obtenues, et de leur donner le plus haut degré de certitude, j'emploie ensuite une seconde méthode, qui n'est que le développement de celle donnée par M. Hill dans un mémoire déjà cité. Elle repose sur l'emploi des coordonnées rectangulaires relatives de la Lune, l'axe des x étant la position moyenne du rayon vecteur de la Lune; on forme aisément deux équations différentielles qui présentent le grand avantage d'être homogènes et du second degré par rapport à ces coordonnées et leurs dérivées, de sorte qu'on peut se contenter de déterminer des fonctions proportionnelles à ces coordonnées, et ce fait simplifie sensiblement les calculs. Ces équations sont intégrées par la méthode des coefficients indéterminés, en suivant les mêmes principes que précédemment, et des résultats obtenus on conclut sans peine la longitude de la Lune, qui ne dépend en effet que du rapport des deux coordonnées envisagées. La parfaite concordance des deux valeurs obtenues pour les termes considérés de la longitude par deux méthodes aussi essentiellement distinctes est une preuve absolue de leur exactitude.

Dans le deuxième mémoire, je calcule, avec la même approximation que Delaunay, les termes de la longitude de la Lune qui dépendent de la première puissance de l'excentricité de l'orbite solaire. Les méthodes employées sont absolument les mêmes que dans le premier mémoire, mais étendues au cas où l'on suppose que l'orbite du Soleil autour de la Terre est non plus une circonférence décrite d'un mouvement uniforme, mais une courbe plane connue parcourue suivant une loi déterminée. Les équations qui fournissent les valeurs des inconnues sont de même forme que dans le premier mémoire : mais leur complication augmente un peu.

Dans le premier article *Sur la théorie de la Lune* inséré au *Bul-*

letin astronomique, je reprends la détermination des termes qui ne dépendent que de m et de la première puissance de e, puis j'y ajoute le calcul de ceux qui contiennent e^2 en facteur. Mais cette fois, je ne me borne pas à la considération de la longitude, et je calcule avec la même approximation le rayon vecteur, ou plutôt son carré, qui se présente ici plus naturellement; de cette façon, j'ai un résultat plus complet; de plus, les équations qu'il faut employer sont beaucoup plus simples que dans la première méthode que j'avais imaginée, propre à déterminer la seule longitude, après élimination du rayon vecteur.

J'emploie toujours, pour arriver au but proposé, deux voies essentiellement distinctes. La seconde est la même que précédemment ; quant à la première, elle est fondée sur l'emploi des équations du mouvement telles qu'elles se présentent naturellement, et combinées comme le fait Laplace. Les procédés d'intégration sont toujours les mêmes, et les calculs sont réduits au minimum par l'introduction de quantités auxiliaires convenablement choisies.

Afin d'avoir une vérification tout à fait complète, je calcule encore par l'une et par l'autre des deux méthodes employées le logarithme hyperbolique du rayon vecteur, ce qui n'offre aucune difficulté.

Les équations établies permettent d'obtenir les développements en série suivant les puissances de m des coefficients inconnus ; mais elles permettent aussi de calculer les valeurs numériques de ces coefficients lorsqu'on introduit dès le début la valeur de m. Ce dernier calcul serait extrêmement rapide ; je l'ai fait pour les coefficients qui ne dépendent que de m et de la première puissance de e, et j'ai trouvé ainsi des résultats en parfaite concordance avec ceux qu'avaient donnés antérieurement MM. Hill et Brown, en partant du même principe, mais en suivant une voie différente. Il est incontestable d'ailleurs qu'au point de vue pratique, c'est ainsi qu'on doit procéder pour construire des tables de la Lune.

Dans mon second article sur la théorie de la Lune, je reprends de la même façon le calcul des termes qui dépendent de la première

puissance de e', en ne négligeant plus le rayon vecteur. Les méthodes suivies sont les mêmes que celles du premier article étendues au cas où le Soleil est supposé décrire une ellipse képlérienne. Comme application, je calcule, après une généralisation convenable des théorèmes d'Adams, le terme en e'^2 dans la partie constante de la parallaxe lunaire, et j'en déduis immédiatement, en utilisant les beaux théorèmes de MM. Newcomb et Brown, la valeur de la partie du coefficient de l'accélération séculaire de la longitude moyenne de la Lune jusqu'au terme en m^{10} inclusivement, c'est-à-dire avec la même approximation que Delaunay. Ce calcul montre que les termes en m^9 et m^{10} donnés par ce dernier sont inexacts, ainsi qu'on devait s'y attendre d'après ce qui a été dit plus haut. Les termes de Delaunay conduisent à adopter pour la valeur numérique de la partie considérée du coefficient de l'accélération séculaire le nombre 5″,765 tandis qu'après correction il vient 5″,700. Ce dernier nombre coïncide parfaitement avec celui que trouve M. Brown, en appliquant un procédé empirique très ingénieux fondé sur l'emploi de la valeur numérique de m et de la partie constante de la parallaxe lunaire donnée exactement par Adams en 1878, jusqu'au neuvième ordre.

Dans l'opuscule que j'ai publié dans la collection *Scientia* sous le titre de *Théorie de la Lune*, je me suis proposé d'expliquer le plus brièvement possible comment on peut étudier le mouvement de la Lune autour de la Terre en tenant compte de toutes les causes de perturbation, et de mettre en évidence les difficultés qu'on rencontre dans cette étude en même temps que les moyens de les surmonter.

M'attachant d'abord à ce qu'on appelle communément la théorie *solaire* du mouvement de la Lune, j'établis les équations relatives à cette théorie; puis j'étudie d'une façon rigoureuse la forme de la solution, en me reportant d'abord aux équations fournies par la méthode de la variation des constantes arbitraires; ces équations peuvent être intégrées par approximations successives ordonnées suivant les puissances du paramètre m, et le théorème de Poisson

permet de fixer la forme de la solution ; mais de cette façon le temps figure en dehors des signes périodiques. D'autre part, on peut encore supposer les équations du mouvement intégrées sous forme purement périodique, et en comparant les développements des coordonnées ou des éléments elliptiques osculateurs à chaque instant à l'orbite lunaire obtenus par ces deux procédés distincts, j'arrive à préciser *a priori* les propriétés de la solution prise sous forme purement trigonométrique. Les coefficients des diverses inégalités des coordonnées polaires ou rectangulaires de la Lune sont des séries ordonnées suivant les puissances entières des paramètres désignés par Delaunay par m, e, e', γ, α, sauf dans des cas très particuliers où les puissances négatives de m s'introduiront : mais les termes corespondants sont d'un ordre très élevé et absolument négligeables.

L'ordre de chaque coefficient par rapport à m peut être fixé à l'avance, et les fonctions du grand axe de l'orbite elliptique osculatrice jouissent de propriétés particulières importantes.

Je démontre ensuite un théorème très général et de la plus grande utilité, qui contient les propositions bien connues sous le nom de théorèmes d'Adams, et qui peut en être regardé comme la généralisation ; en voici l'énoncé :

Si x, y, z sont les coordonnées rectangulaires de la Lune, de la forme

$$x = \Sigma\, b_p \cos (k_p t + \varepsilon_p),$$
$$y = \Sigma\, b_p \sin (k_p t + \varepsilon_p),$$
$$z = \Sigma\, c_p \sin (k'_p t + \varepsilon'_p),$$

et si les équations du mouvement sont sous la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z};$$

si de plus q est l'un quelconque des paramètres dont dépendent les valeurs définitives des coordonnées et la fonction U elle-même,

et si $\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)$ désigne la dérivée partielle de U par rapport à q, prise en regardant U comme fonction des coordonnées de la Lune et du Soleil, et supposant x, y, z constants; si enfin, P et Q désignent les parties constantes des développements trigonométriques des fonctions $2U - r\frac{\partial U}{\partial r}$ et $\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)$, on a l'égalité

$$\frac{\partial P}{\partial q} - 2\,Q = \sum b_p{}^2\,\frac{\partial\,(k_p{}^2)}{\partial q} + \sum c_p{}^2\,\frac{\partial\,(k'_p{}^2)}{\partial q}.$$

Je procède alors à l'intégration des équations du mouvement par la méthode des coefficients indéterminés, en suivant toujours les mêmes principes que dans les mémoires précédents; les équations employées sont d'ailleurs très voisines de celles qu'a utilisées G. de Pontécoulant dans sa *Théorie de la Lune*, et d'un emploi très commode. Je calcule effectivement toutes les inégalités de la longitude, de la parallaxe et de la latitude de la Lune, jusqu'au quatrième ordre de petitesse inclusivement au moins, en regardant m, e, $é$, γ comme de petites quantités du premier ordre et α comme du second ordre; dans tous les cas qui réclament quelque attention, j'écris explicitement les équations qui déterminent les inconnues afin de guider le lecteur.

Une fois la théorie solaire du mouvement de la Lune obtenue, il faut tenir compte des inégalités secondaires produites par l'action des planètes, par les perturbations solaires, par la forme de la Terre. A cet effet, il faut introduire une nouvelle fonction perturbatrice, et former les équations que nécessite l'application de la méthode de la variation des constantes arbitraires, ces constantes étant ici celles qui figurent dans les formules fournies par la théorie solaire. Les coefficients de ces équations se forment sans peine; il suffit comme l'a montré M. Newcomb, de calculer trois fonctions de n, e, γ, dépendant elles-mêmes uniquement de la partie constante de la fonction $2U - r\frac{\partial U}{\partial r}$, ainsi que le prouve le théorème énoncé ci-dessus.

Enfin, je détermine effectivement les principales inégalités

périodiques dues à la forme de la Terre ; deux inégalités planétaires parmi les plus importantes, et produites par l'action de Vénus ; les inégalités dues au déplacement séculaire de l'écliptique ; et je termine en démontrant les beaux théorèmes de MM. Newcomb et Brown sur le calcul des accélérations séculaires de la longitude moyenne, de la longitude du périgée et de la longitude du nœud ascendant de la Lune. La voie suivie est un peu différente de celle qu'emploient ces auteurs, et le rôle essentiel de la partie constante de la fonction $2U - r\frac{\partial U}{\partial r}$ est mis en évidence. Les calculs faits précédemment permettent alors d'écrire immédiatement les premiers termes des accélérations séculaires envisagées, termes qui avaient été pendant longtemps calculés inexactement, comme l'a montré le premier, Adams, en 1853.

III. — ANALYSE ET MÉCANIQUE RATIONNELLE

§ 1. — Analyse

1° **Sur un problème de géométrie** (*Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, t. III, 1889).

Dans cette courte note, je donne les nombres exacts de systèmes de coniques proprement dites quadruplement tangentes à une quartique plane ayant un, deux, ou trois points doubles. Ces nombres sont 30, 13, et 4 et non 31, 15 et 7 comme l'avait indiqué Clebsch dans ses *Leçons de géométrie*.

Je dois ajouter que la même remarque avait été faite avant moi par M. G. Humbert dans ses belles recherches sur l'application des fonctions fuchsiennes à la théorie des courbes algébriques.

2° **Sur la division algébrique appliquée aux polynômes homogènes** (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. I, 1895, p. 61-90).

Soient g et f deux formes binaires des degrés n et p par rapport aux variables homogènes x_1 et x_2 ; soient y_1 et y_2 un autre couple d'indéterminées covariantes aux premières ; on peut déterminer deux autres formes q et f_1, des degrés $n - p$ et $p - 1$ par rapport aux variables x_1, x_2, et telles que l'on ait identiquement

$$g + fq + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^{n-p+1} f_1 = 0.$$

Cette opération qui est possible d'une seule façon est la généralisation naturelle de la division algébrique.

En poursuivant cette sorte de division sur les formes f et f_1, et continuant de même, et en m'aidant d'un théorème important sur les conditions nécessaires et suffisantes pour que tous les déterminants d'ordre p tirés d'une matrice à p lignes et à $p+q$ colonnes soient nuls, indépendamment de toute hypothèse faite *a priori*, j'arrive à former une série de covariants simultanés des deux formes f et g, renfermant une ou deux séries de variables, dont l'évanouissement identique est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux formes f et g aient un nombre donné de facteurs linéaires communs; en d'autres termes, je traite ainsi complètement le problème de l'élimination au point de vue de la théorie des formes.

En appliquant les résultats obtenus au cas particulier où les deux formes f et g sont les dérivées partielles d'une même forme, je traite de même complètement le problème des racines égales, en obtenant des covariants dont l'évanouissement identique exprime qu'une forme donnée admet un nombre donné de racines égales; ces covariants sont d'ailleurs analogues aux fonctions de Sturm, et jouissent des mêmes propriétés : ce sont ces fonctions mêmes, telles qu'on doit les concevoir dans la théorie des formes.

3° **Sur la forme doublement quadratique binaire et ses rapports avec la théorie des fonctions elliptiques.** (Ce mémoire est à l'impression et doit paraître prochainement dans les *Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure*).

Dans ce travail, j'étudie la forme doublement quadratique binaire à deux couples de variables pouvant être soumises à des substitutions linéaires différentes, et j'en forme un système d'invariants et de covariants dont la connaissance permet inversement de déterminer la forme elle-même. L'intégration de l'équation d'Euler prise sous sa forme générale et la résolution du problème de l'inversion des intégrales elliptiques résultent facilement de cette étude, sous la

forme qui leur convient quand on les envisage au point de vue de la théorie des formes, c'est-à-dire quand on ne veut introduire dans les calculs que des quantités invariantes ou covariantes.

4° **Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure.** (T. I, Gauthier-Villars, 1900).

Dans cet ouvrage, conçu au point de vue didactique, mais qui renferme beaucoup de choses qui me sont propres, je me suis proposé d'étudier la théorie des formes, surtout au point de vue de ses applications géométriques. J'ai donc laissé complètement de côté le point de vue purement algébrique, c'est-à-dire l'étude des *systèmes complets* d'invariants.

Dans le premier volume, seul paru jusqu'à présent, j'ai traité les formes binaires et les formes ternaires, de façon à embrasser complètement la géométrie plane, projective ou métrique; le second volume sera consacré aux formes quaternaires et à celles qui en dérivent, ainsi qu'à leurs applications à la géométrie de l'espace.

Je ne me suis pas restreint aux formes qui ne dépendent que d'une seule série de variables, mais j'envisage dès le début la théorie des fonctions invariantes de la façon la plus générale, afin de pouvoir étudier toutes les différentes correspondances qu'on peut imaginer entre les éléments géométriques de deux ou plusieurs espaces distincts ou non.

Voici d'ailleurs les titres des chapitres dans lesquels l'ouvrage est divisé; on peut ainsi facilement se rendre compte de l'esprit dans lequel il a été conçu et des matières qui y sont traitées :

Livre I. *La géométrie binaire.*

1° Théorie générale des invariants des systèmes binaires.
2° Les formations invariantes générales.
3° Les systèmes linéaires.
4° Les résultants et les discriminants.
5° La forme bilinéaire.

6° Les systèmes quadratiques.

7° Les formes canoniques en général. La forme cubique, la forme biquadratique et la forme quintique.

8° La forme linéo-quadratique et la forme doublement quadratique.

9° Etude directe des formes à deux séries de variables.

10° La géométrie métrique binaire.

Livre II. *La géométrie ternaire.*

1° Théorie générale des invariants des systèmes ternaires.

2° Les systèmes linéaires.

3° Les éléments communs à deux ou plusieurs séries.

4° Les propriétés générales des séries.

5° Générations diverses des séries ternaires.

6° La forme bilinéaire et l'homographie.

7° La série quadratique.

8° Le système de deux formes quadratiques.

9° La correspondance réciproque entre deux espaces coïncidents.

10° Le système de deux formes bilinéaires. La correspondance quadratique birationnelle.

11° Etude géométrique du réseau de séries quadratiques.

12° La série cubique.

13° La forme trilinéaire.

14° La série quartique.

15° La géométrie métrique ternaire générale.

16° La géométrie métrique ternaire spéciale.

§ 2. — Mécanique rationnelle

1° **Sur la réduction du problème des brachistochrones aux équations canoniques** (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. C, 1885, p. 1577-1578).

Si l'on cherche la courbe brachistochrone pour un point matériel dont le mouvement dépend d'une fonction de forces U, on peut réduire ce problème aux équations canoniques, en le remplaçant par la recherche de la trajectoire d'un point matériel libre qui aurait une vitesse inverse de la vitesse du premier mobile, ainsi qu'il résulte du principe de la moindre action. On détermine la fonction de forces qui convient à ce nouveau mouvement, et l'on obtient immédiatement les équations de la brachistochrone, ainsi que les propriétés de cette courbe et de la réaction qu'elle exerce sur le mobile.

Les résultats s'étendent sans peine au cas où la brachistochrone est assujettie à se trouver sur une surface donnée.

2° **Sur la dynamique du point** (*Nouvelles Annales de mathématiques*, 3e série, t. XIII, 1894, p. 52-65).

En partant des mêmes principes que dans la note précédente, j'étudie ici la réduction de divers problèmes de Mécanique rationnelle les uns aux autres ; il suffit de comparer les mouvements de deux points matériels soumis à des forces dérivant de potentiels, fonction l'un de l'autre, et décrivant la même courbe, l'un librement, l'autre par suite d'une liaison sans frottement. Les résultats s'étendent encore au cas où les trajectoires sont assujetties à rester sur une surface donnée.

3° **Sur un problème de Mécanique rationnelle** (Cette note doit paraître dans l'un des prochains numéros du *Bulletin des sciences mathématiques*).

Dans cette courte note j'étudie les réactions qui se produisent lorsque, par une liaison sans frottement, deux courbes matérielles en mouvement relatif sont assujetties à rester constamment tangentes l'une à l'autre. Ce problème n'est traité, je crois, dans aucun des traités classiques de Mécanique rationnelle : en partant de la définition de l'absence de frottement, c'est-à-dire en écrivant que

dans tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons, le travail des forces de liaison est nul, on voit que les réactions ne peuvent pas se réduire à une force unique, mais sont composées d'une force et d'un couple dont j'étudie les propriétés dans le cas le plus général et dans quelques cas particuliers.

IV. — ENSEIGNEMENT

En 1882, étant élève à l'École Normale supérieure, j'ai rédigé, sous la direction de M. Hermite, le cours d'analyse qu'il professait pendant le semestre d'été.

Comme ouvrages d'enseignement, j'ai publié un *Cours de géométrie élémentaire* (Belin, 1894), un *Cours d'arithmétique élémentaire* (Belin, 1895) et un *Cours d'algèbre élémentaire* (Belin, 1896); j'ai rédigé aussi, en collaboration avec M. Tisserand des *Leçons de cosmographie* (A. Colin, 1895) dans la collection publiée par M. Darboux; enfin j'ai fait paraître des *Leçons élémentaires sur la théorie des formes et ses applications géométriques*, à l'usage des candidats à l'agrégation des sciences mathématiques (Gauthier-Villars, 1898).

J'ai donné aux *Nouvelles annales de mathématiques* (3e série, t. XV, 1896) une note sur l'*Intersection de deux quadriques;* à la *Revue de mathématiques spéciales* quelques notes consacrées à des questions d'enseignement, en particulier sur l'*Étude d'une courbe algébrique plane autour d'un point singulier* (t. III, 1895, p. 130-137).

SUPPLÉMENT

La note signalée à la page 6 a paru dans le numéro de décembre 1902 du *Bulletin Astronomique* sous le titre : **Sur un point particulier des cas de commensurabilité approchée dans le problème des trois corps.**

Le deuxième article **Sur la théorie de la Lune** (p. 14) a paru dans le numéro de novembre 1902 du *Bulletin Astronomique.*

Le mémoire signalé à la page 25 a paru dans les *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* (décembre 1902) sous le titre : **Sur la forme doublement quadratique et ses rapports avec la théorie des fonctions elliptiques.**

La note sur un problème de **Mécanique rationnelle** (p. 28) a paru dans le numéro d'octobre 1902 du *Bulletin des Sciences Mathématiques*

J'ai publié enfin, dans le numéro de septembre 1903 du *Bulletin Astronomique*, un assez long mémoire intitulé : **Contribution à l'étude du mouvement des petites planètes du type d'Hécube**, dont je vais indiquer sommairement les résultats.

La planète Hécube dont la découverte remonte à 1869 est une de celles dont la théorie offre le plus de difficultés, son moyen mouvement étant sensiblement double de celui de Jupiter. Sans reprendre la théorie d'Hécube, qui a déjà occupé plusieurs astronomes distingués, entre autres MM. Simonin et Harzer, je me suis proposé de résoudre et de discuter complètement un problème plus simple, mais voisin, et dont l'étude doit mener à des résultats se rapprochant beaucoup de la réalité : j'ai d'ailleurs été encouragé dans cette tâche par les conseils de MM. Poincaré et Callandreau, qui se sont occupés à plusieurs reprises des cas de commensurabilité approchée dans le système solaire.

Je suppose en présence le Soleil, Jupiter, et un astéroïde de masse négligeable dont le moyen mouvement est voisin du double de celui de

Jupiter; de plus je suppose l'orbite de Jupiter circulaire, et la petite planète restant dans le plan de cette orbite.

Suivant l'esprit de la méthode de Delaunay, je néglige alors dans la fonction perturbatrice les termes à courte période et les termes qui contiennent en facteur le cube de l'excentricité; on se trouve ainsi en présence d'un problème voisin de celui posé primitivement, et dont la solution doit nécessairement fournir une bonne approximation.

Cette solution peut être obtenue rigoureusement à l'aide des fonctions elliptiques, et je montre d'abord comment on doit faire le calcul, en employant les fonctions de Weierstrass.

Puis j'examine en détail les différentes circonstances qui peuvent se présenter, et dans chaque cas je donne les formules que l'on peut utiliser pratiquement.

Les résultats sont rendus plus nets à l'aide d'une interprétation géométrique convenable.

Enfin, pour que l'on puisse facilement se rendre un compte exact de la façon dont varient les éléments de la solution, j'ai calculé numériquement ces éléments pour onze valeurs du rapport des moyens mouvements, choisies voisines de 2, et dans chacun des onze cas ainsi fixés pour les valeurs les plus intéressantes de l'excentricité initiale.

Parmi les conclusions qui se dégagent de ce travail, je signalerai celle-ci : les observations d'une petite planète du type d'Hécube, même prolongées pendant de longues années, ne permettent pas en général une détermination précise des éléments du mouvement de cet astre, car ceux-ci peuvent changer beaucoup, sans que la trajectoire se modifie sensiblement pendant une grande partie de son cours.
